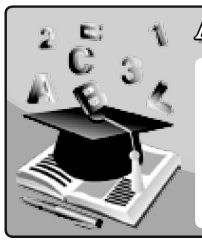
Índice

- Sistemas de medición angular I.....5
- Sistemas de medición angular II.....13
- Sistemas de medición angular III.....21
- Teorema de Pitágoras.....29
- Razones trigonométricas de un ángulo agudo I.....38
- Razones trigonométricas de un ángulo agudo II.....47
- Razones trigonométricas de ángulos notables de 37º y 53º.....56
- Razones trigonométricas de ángulos notables de 30º, 45º y 60º.....65
- Aplicaciones gráficas de los triángulos rectángulos notables.....74
- Propiedades de las razones trigonométricas de un ángulo agudo I.....83
- Propiedades de las razones trigonométricas de un ángulo agudo II.....92
- Aplicaciones de las propiedades de las razones trigonométricas de un ángulo agudo.....100
- Geometría analítica I.....107
- Geometría analítica II.....119
- Geometría analítica III.....130
- Geometría analítica IV.....140
- Geometría analítica V.....150
- Ángulos en posición normal.....161
- Razones trigonométricas de un ángulo en posición normal I.....171
- Razones trigonométricas de un ángulo en posición normal II.....180
- Razones trigonométricas de un ángulo en posición normal III.....189
- Signos de las razones trigonométricas.....198
- Razones trigonométricas de ángulos cuadrantales.....206

SISTEMAS DE MEDICIÓN ANGULAR I

CAPÍTULO 1

MATEMÁTICA



Aprendizajes esperados

- Reconoce los ángulos de medida positiva y negativa.
- Relaciona las unidades angulares.

Helicocuriosidades

La trigonometría

Originalmente, la trigonometría es la ciencia cuyo objeto es la resolución numérica (algebraica) de los triángulos. Los seis elementos principales en todo triángulo son sus tres lados y sus tres ángulos. Cuando se conocen tres de estos elementos, con tal que al menos uno de ellos sea un lado, la trigonometría enseña a solucionar el triángulo, esto es, a encontrar los otros tres elementos.

Sin embargo, el estudio de la trigonometría no limita sus aplicaciones a los triángulos: geometría, navegación, agrimensura, astronomía; sino también para el tratamiento matemático en el estudio del movimiento ondulatorio, las vibraciones, el sonido, la corriente alterna, termodinámica, investigación atómica, etc. Para lograr esto, se debe ampliar el concepto de función trigonométrica a una función de una variable real, en vez de limitarse a una función de ángulos.

HELIBÚSQUEDA

Según la lectura, encuentra las palabras escondidas: Triángulo, trigonometría, ángulo, tres, elementos, navegación, astronomía, ciencia.

A	T	M	O	R	N	A	V	E	G	A	C	I	O
S	R	R	A	I	M	O	N	O	R	T	R	E	S
T	I	B	I	Q	E	L	E	M	R	T	O	L	S
R	A	V	N	G	A	C	U	I	O	N	I	O	N
O	N	T	R	G	O	S	A	T	R	O	T	M	O
N	I	G	E	V	A	N	V	E	G	N	C	E	I
O	L	T	R	E	G	N	O	M	E	T	R	N	C
M	O	P	M	U	L	A	D	M	N	A	V	T	A
I	M	S	L	D	A	B	E	T	E	S	S	O	C
A	S	O	O	D	A	L	A	D	O	T	A	S	I
R	B	D	C	I	E	N	C	I	A	R	R	F	L
Q	N	A	V	E	G	A	C	I	O	N	M	I	P
A	P	L	R	M	Q	N	A	O	L	U	G	N	A

Helicoteoría

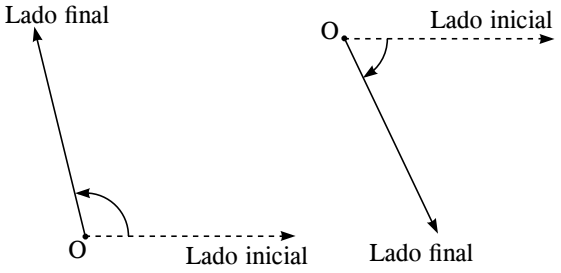
ÁNGULO TRIGONOMÉTRICO

Es aquel ángulo que se genera por la rotación de un rayo alrededor de un punto fijo llamado vértice (la rotación se realiza en un mismo plano) desde una posición inicial hasta otra final.

Al punto O se le denomina **vértice**.

A la posición inicial se le denomina **lado inicial**.

A la posición final se le denomina **lado final**.

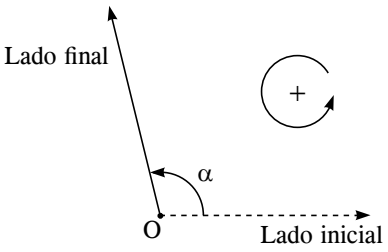


Observemos en las figuras que el rayo puede girar en sentido antihorario u horario, por lo tanto, el sentido de giro del rayo no se restringe.

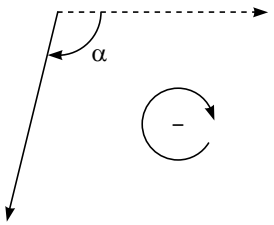
Características del ángulo trigonométrico

A. Por convención se considera a

- La medida positiva si el giro se efectúa en sentido antihorario.



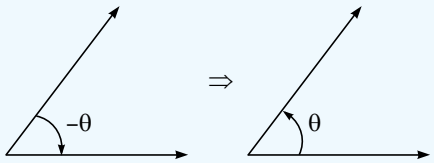
- La medida negativa si el giro se efectúa en sentido horario.



B. La medida de un ángulo trigonométrico no tiene límite, puesto que un rayo puede ser girado tanto como se desee, sea en sentido horario o antihorario.

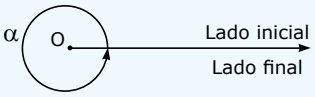
Observación

Cuando a un ángulo trigonométrico se le invierte su sentido, su signo cambia.

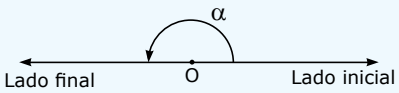


Nota

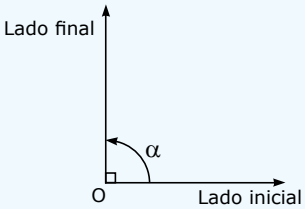
Algunos de los ángulos más utilizados son



Ángulo de una vuelta



Ángulo de media vuelta



Ángulo de un cuarto de vuelta

SISTEMAS DE MEDIDA ANGULAR

SISTEMA SEXAGESIMAL

- Unidad angular

  Grado sexagesimal: $1°$

- Subunidades

  Minuto sexagesimal: $1'$

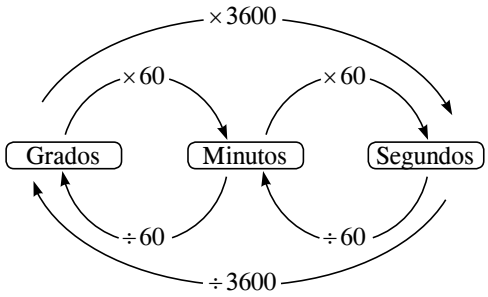
  Segundo sexagesimal: $1''$

- Equivalencias

  $\boxed{m\sphericalangle 1 \text{ vuelta} = 360°}$ $\boxed{1° <> 60'}$ $\boxed{1' <> 60''}$

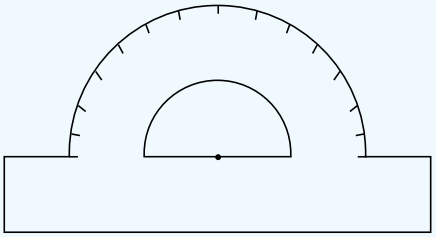
Regla de conversión

Se utiliza para pasar un ángulo de una unidad a otra.



Nota

Los ángulos pueden ser medidos con una regla graduada llamada transportador.



Observación

Un ángulo puede ser medido en grados, minutos y segundos. Así un ángulo de 24 grados, 18 minutos y 52 segundos, lo escribiremos: 24° 18' 52".

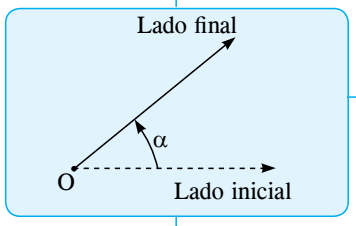
Luego

Si $\theta = 24°\ 18'\ 52''$, entonces $\theta = 24° + 18' + 52''$.

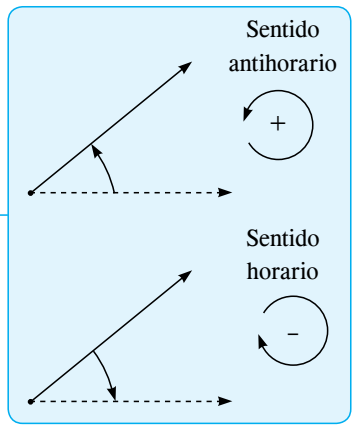
Helicosíntesis

ÁNGULO TRIGONOMÉTRICO

Se genera por la rotación de un rayo alrededor de un punto fijo denominado vértice, desde una posición inicial hasta otra final.



estos pueden ser



SISTEMA DE MEDIDA ANGULAR

SISTEMA SEXAGESIMAL

unidad → Grado sexagesimal

subunidades → Minuto y segundo sexagesimal

equivalencias

m∢ 1 vuelta = 360°
1° < > 60'
1' < > 60"

Problemas resueltos

1. Convierte los siguientes ángulos a minutos sexagesimales:

I. 7° II. 25° III. 11°

Dé como respuesta el valor de I+II–III.

Resolución

I. $7 \times 60' = 420'$

II. $25 \times 60' = 1500'$

III. $11 \times 60' = 660'$

Piden

$$420' + 1500' - 660' = 1260'$$

Rpta.: 1260'

2. Sume la siguiente expresión:

$$9°\ 15' + 25°\ 22' + 31°\ 18'$$

Resolución

$$\begin{array}{r} 9°\ 15'\ + \\ 25°\ 22' \\ \underline{31°\ 18'} \\ 65°\ 55' \end{array}$$

Rpta.: 65° 55'

3. Calcule M + N si

$$M = \frac{5°\ 5'}{5'} \quad y \quad N = \frac{7°\ 7'}{7'}$$

Resolución

$$M = \frac{5 \times 60' + 5'}{5'} \qquad N = \frac{7 \times 60' + 7'}{7'}$$

$$M = \frac{300' + 5'}{5'} \qquad N = \frac{420' + 7'}{7'}$$

$$M = \frac{305'}{5'} \qquad N = \frac{427'}{7'}$$

$$M = 61 \qquad N = 61$$

Piden

$$M + N = 61 + 61$$

$$M + N = 122$$

Rpta.: 122

4. Calcule $\alpha + \theta$ si

$$\alpha = 12°\ 11' + 11°\ 24'$$

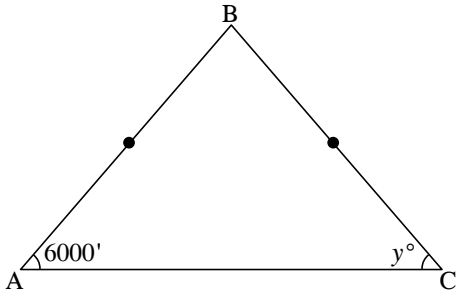
$$\theta = 2°\ 8' + 3°\ 10'$$

Resolución

$$\begin{array}{r} \alpha = 23°\ 35'\ + \\ \theta = \ \ 5°\ 18' \\ \hline \alpha + \theta = 28°\ 53' \end{array}$$

Rpta.: 28° 53'

5. En el triángulo mostrado, halle el valor de y.



Resolución

$$y° = 6000' \times \frac{1°}{60'}$$

$$y° = 60°$$

$$y = 60$$

Rpta.: 60

Desarrollando en clase

Nivel I

1. De las siguientes proposiciones, escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

a. $1° \langle\rangle 3600''$ ( )

b. $1' \langle\rangle 60°$ ( )

c. $60'' \langle\rangle 1'$ ( )

2. Convierta los siguientes ángulos a minutos sexagesimales:

I. 4° II. 15° III. 20°

Dé como respuesta la suma entre ellas.

Resolución

Nivel II

3. Convierta los siguientes ángulos a segundos sexagesimales:

I. 5° II. 11° III. 16°

Dé como respuesta la suma entre ellas.

Nivel III

4. El Sr. Alvarez deja como tarea a sus hijos Matías y Javier realizar las siguientes sumas; a Matías le encargó sumar 23° 40' con 11° 20' y a Javier sumar 32° 20' con 12° 40'.

a. Indique el resultado de cada uno.

b. ¿Quién obtuvo el resultado mayor?

Resolución

5. Convierta los siguientes segundos sexagesimales a grados sexagesimales:

I. 21 600" II. 25 200" III. 32 400"

Dé como respuesta la suma entre ellos.

Resolución

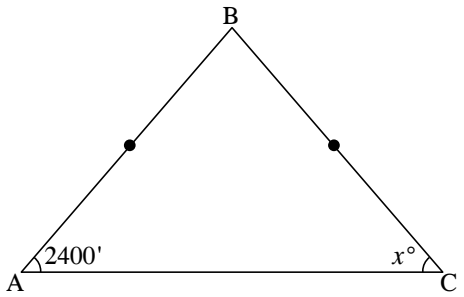
6. Calcule $P + Q$ si $P = \dfrac{3°\ 3'}{3'}$ y $Q = \dfrac{7°\ 20'}{11'}$.

Resolución

7. Efectúe $35°\ 14' + 40°\ 32' - 16°\ 11'$.

Resolución

8. En el triángulo mostrado, halle el valor de x.



Resolución

Sigo practicando

1. Si $\alpha+\beta+\theta=70$, efectúe

$$P=\alpha^\circ\ \beta'\ \theta''+\theta^\circ\ \alpha'\ \beta''+\beta^\circ\ \theta'\ \alpha''$$

A) $70^\circ 11' 11''$ B) $70^\circ 71' 70''$ C) $71^\circ 11' 10''$
D) $72^\circ 11' 11''$ E) $70^\circ 11' 10''$

2. Halle el valor de α si

$$\alpha^\circ=\left[\frac{x^\circ\ (3x)'}{x'}-3\right]'$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

3. Convierta los siguientes ángulos a minutos sexagesimales:

I. 9° II. 30° III. 18°

A) 540', 1600', 1800'
B) 450', 1800', 1080'
C) 540', 1800', 1008'
D) 450', 1080', 1800'
E) 540', 1800', 1080'

4. Convierta a minutos $5^\circ 24'$.

A) 330' B) 334' C) 324'
D) 254' E) 290'

5. Efectúe

$$M=49^\circ 36'+25^\circ 20'-32^\circ 25'$$

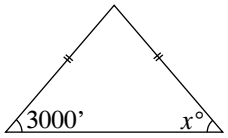
A) $24^\circ 31'$ B) $42^\circ 24'$ C) $24^\circ 24'$
D) $42^\circ\ 31'$ E) $42^\circ 13'$

6. Simplifique

$$P=\frac{6^\circ 40'}{25'}$$

A) 20 B) 16 C) 18
D) 25 E) 22

7. En el triángulo mostrado, halle el valor de x.



A) 50 B) 60 C) 30
D) 40 E) 45

Exigimos más

Nivel I

1. De las siguientes proposiciones, escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda, luego marque la alternativa correcta.

I. $2° = 120'$ II. $2° = 3600''$ III. $2' = 120''$

A) FFV B) VVV C) VFV
D) FFV E) VVF

2. Convierta los siguientes ángulos a minutos sexagesimales:

I. 10° II. 13° III. 22°

A) 500'; 680'; 1220' B) 600'; 680'; 1230'
C) 500'; 780'; 1320' D) 600'; 780'; 1320'
E) 600'; 580'; 1230'

3. Convierta los siguientes ángulos a segundos sexagesimales:

I. 6° II. 16° III. 21°

Dé como respuesta el valor de I + III – II.

A) 39 660" B) 39 600" C) 36 900"
D) 40 500" E) 40 600"

4. Convierta los siguientes ángulos a grados sexagesimales:

I. 14 400" II. 72 000" III. 18 000"

Dé como respuesta el valor de II + III – I.

A) 10° B) 21° C) 11°
D) 31° E) 41°

Nivel II

5. Sume $12° 9' + 28° 27' + 19° 23'$.

A) 58° 58' B) 57° 57' C) 59° 59'
D) 60° E) 59° 58'

6. Relacione columnas con su equivalente respectivo.

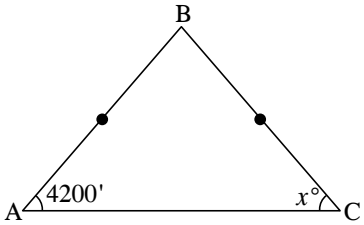
Minutos	Grados
I. 420'	a. 12°
II. 840'	b. 7°
III. 720'	c. 14°

A) Ia, IIc, IIIb B) Ia, IIb, IIIc
C) Ib, IIc, IIIa D) Ib, IIa, IIIc
E) Ic, IIb, IIIc

7. Calcule $P + Q$ si $P = \dfrac{7°\ 7'}{7'}$ y $Q = \dfrac{11°\ 11'}{11'}$.

A) 121 B) 122 C) 123
D) 124 E) 125

8. En el triángulo mostrado, halle el valor de x.



A) 60 B) 100 C) 70
D) 110 E) 40

Nivel III

9. Halle el valor de

$$M = \frac{10' + 20' + 30' + \ldots + 60'}{2'' + 4'' + 6'' + \ldots + 12''}$$

A) 400 B) 300 C) 150
D) 120 E) 200

10. Cuántos segundos hay en

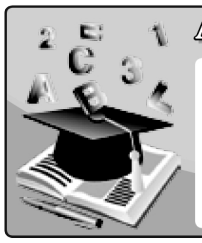
$$\phi = 3°\ 20'\ 43''$$

A) 12 033" B) 12 043" C) 14 543"
D) 12 543" E) 10 033"

SISTEMAS DE MEDICIÓN ANGULAR II

CAPÍTULO 2

MATEMÁTICA



Aprendizajes esperados

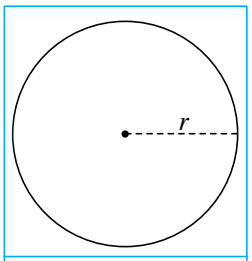
- Relaciona los sistemas sexagesimal y radial.
- Convierte ángulos del sistema sexagesimal al radial.

Helicocuriosidades

El valor de pi (π) según los babilonios

Babilonia. En la antigua Mesopotamia, región que se situó en Asia, entre el río Tigris y el Eufrates, floreció una civilización cuya antigüedad se remonta a 57 siglos aproximadamente: los babilonios.

Los babilonios fueron, hace más de 6000 años, los inventores de la rueda. Tal vez de ahí provino su afán por descubrir las propiedades de la circunferencia, y esto condujo a estudiar la relación entre ella y su diámetro.



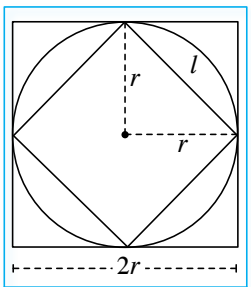
Círculo de radio r

Los sabios de esta civilización cultivaron la astronomía y conociendo que el año tiene aproximadamente 360 días, dividieron la circunferencia en 360 parte iguales obteniendo lo que se llama actualmente el grado sexagesimal. También sabían trazar el hexágono (polígono de 6 lados iguales) inscrito en un círculo y conocían una fórmula para encontrar el área del trapecio.

Recordemos que la distancia entre el centro del círculo y cualquier otro punto sobre la circunferencia se llama radio r. Para calcular el área del círculo usábamos la fórmula $A = \pi r \cdot r = \pi r^2$ o (pi por radio al cuadrado) donde π (pi) era un número cuyo origen rara vez se nos explicó, que, según la mayoría de nuestros maestros, valía aproximadamente 3,1416.

Los babilonios calcularon el valor de π considerando que el área del círculo era un valor intermedio entre las áreas de los cuadrados inscritos y circunscritos a él. El proceso era el siguiente:

1. Dibujaban un círculo de radio r.
2. Trazaban un cuadrado inscrito a él (interior).
3. Trazaban un cuadrado circunscrito a él (exterior).



Proceso babilónico

El área del cuadrado exterior es $2r \cdot 2r = 4r \cdot r = 4r^2$.

Para calcular el área del cuadrado interior, necesitamos primero saber cuánto mide su lado l. Observemos que el lado l es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de lados que miden r. El teorema de Pitágoras (que ya conocían los babilonios) nos proporciona una

fórmula para expresar el valor de l: la hipotenusa al cuadrado (es decir t^2) es igual a la suma de los catetos al cuadrado ($r^2 + r^2$). De aquí se tiene entonces que $l = \sqrt{2r^2}$ y por lo tanto el área del cuadrado interior es $\sqrt{2r^2} \cdot \sqrt{2r^2} = 2r^2$.

Como el área del cuadrado exterior es mayor que la del círculo y la del cuadrado interior es menor que la del círculo, tenemos que $2r^2 <$ área del círculo $< 4r^2$.

El valor entre $2r^2$ y $4r^2$ que los babilonios tomaban para aproximar el área del círculo era $3r^2$. Ya mencionamos que el área exacta del círculo de radio r es $A = \pi r^2$, por lo que el valor aproximado que los babilonios le daban a π era 3. Así la diferencia entre el valor de π que ellos tomaban y el que nosotros usábamos en la primaria es de 0,1416 que puede resultar no tan grande, ¿no creen?

1. Según la lectura, lea las afirmaciones, y marque la respuesta correcta.

   I) El grado sexagesimal se obtuvo

      A) dividendo y trazando el hexágono.

      B) dividendo la circunferencia en 360 partes iguales.

      C) dividendo el año en 360 días.

   II) El área del círculo se calcula mediante la fórmula

      A) $r\pi^2$.

      B) $r^2\pi$.

      C) $2\pi r$.

2. Indique la secuencia ordenada del proceso babilónico para calcular el valor de π.

Trazar un cuadrado circunscrito	Dibujar un círculo de radio r	Trazar un cuadrado inscrito
(I)	(II)	(III)

   A) I - II - III

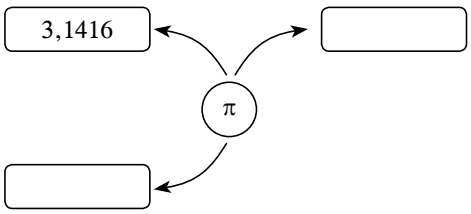
   B) II - I - III

   C) III - II - I

   D) I - III - II

   E) II - III - I

3. Investigue los valores de π y complete los espacios en blanco.

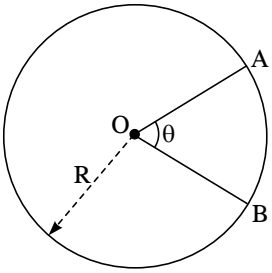


Helicoteoría

SISTEMA RADIAL O CIRCULAR

Denominado también sistema internacional, este sistema tiene como unidad a un ángulo cuyo vértice está en el centro de una circunferencia y que subtiende a un arco cuya longitud es igual al radio de dicha circunferencia.

A esta unidad se le llama radián cuya medida se representará así: 1 rad.



Del gráfico, si $l_{\widehat{AB}} = R \rightarrow \theta = 1$ rad.

Ahora, dado que la longitud de una circunferencia es $2\pi R$, podemos determinar que: $\boxed{1 \text{ rad} = \dfrac{m\measuredangle 1 \text{ vuelta}}{2\pi}}$

Así obtenemos que: $\boxed{m\measuredangle 1 \text{ vuelta} = 2\pi \text{ rad}}$

Equivalencias entre los sistemas sexagesimal y radial

Se conoce que: $m\measuredangle\ 1 \text{ vuelta} = 360° <> 2\pi \text{ rad}$

$\rightarrow 2\pi \text{ rad} <> 360°$

Simplificando: $\boxed{\pi \text{ rad} <> 180°}$

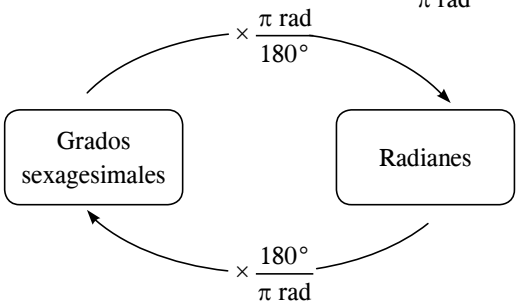
Algunos de los ángulos más utilizados son

$\frac{\pi}{2}$ rad $<> \frac{180°}{2} = 90°$
$\frac{\pi}{3}$ rad $<> \frac{180°}{3} = 60°$
$\frac{\pi}{4}$ rad $<> \frac{180°}{4} = 45°$
$\frac{\pi}{5}$ rad $<> \frac{180°}{5} = 36°$
$\frac{\pi}{6}$ rad $<> \frac{180°}{6} = 30°$

En general, para convertir un ángulo de un sistema angular a otro, utilizaremos el **factor de conversión**.

Así para convertir un ángulo de grados sexagesimales a radianes, multiplicaremos el ángulo dado por $\dfrac{\pi \text{ rad}}{180°}$.

Y para convertir un ángulo de radianes a grados sexagesimales, multiplicaremos el ángulo dado por $\dfrac{180°}{\pi \text{ rad}}$.



Nota

Para los cálculos el valor de π se considera

$\pi = 3{,}1416$

Recuerda

Para sumar o restar ángulos, estos deben estar en la misma unidad angular.

Así para operar con mayor facilidad se recomienda utilizar el grado sexagesimal.

Sabía que...

A lo largo de la historia, la expresión de π ha asumido muchas variaciones. En uno de los más antiguos textos matemáticos, el papiro de Rhind (1650 a.C.) escrito por el egipcio Ahmes, se afirma que el área de un círculo es como la de un cuadrado cuyo lado es igual al diámetro disminuido en 1/9. Fue descubierto en 1855.

$$\pi \cong \frac{256}{81}$$

Nota

Como π rad $= 180°$

$\rightarrow 1 \text{ rad} <> \dfrac{180°}{\pi} \rightarrow 1 \text{ rad} <> \dfrac{180°}{3{,}1416}$

$\boxed{1 \text{ rad} \cong 57{,}3°}$

Así tenemos 1 rad > 1°

Helicosíntesis

SISTEMA RADIAL

También denominado sistema circular o internacional

Relación entre sistemas

- Sistema sexagesimal: m∢1 vuelta = 360°
- Sistema radial: m∢1 vuelta = 2π rad

360° < > 2π rad

180° < > π rad

Factor de conversión

Grados sexagesimales $\xrightarrow{\times \frac{\pi \text{ rad}}{180°}}$ Radianes

Radianes $\xrightarrow{\times \frac{180°}{\pi \text{ rad}}}$ Grados sexagesimales

Problemas resueltos

1. Reduzca

$$Q = \frac{\pi}{30}\text{ rad} + 72^{\circ} + \frac{\pi}{10}\text{ rad}$$

Resolución

1.° $\frac{\cancel{\pi}}{30^{\circ}} \times \frac{180^{\circ}}{\cancel{\pi}} = 6^{\circ}$

2.° $\frac{\cancel{\pi}}{10^{\circ}} \times \frac{180^{\circ}}{\cancel{\pi}} = 18^{\circ}$

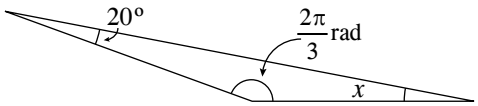
→ $Q = 6° + 72° + 18°$

$Q = 78° + 18°$

$\therefore Q = 96°$

Rpta.: 96°

2. Halle el valor de x en



Resolución

1.° $\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{3}_{1}} \times \frac{\cancel{180^{\circ}}^{60^{\circ}}}{\cancel{\pi}} = 120^{\circ}$

→ $x + 120° + 20° = 180°$

$x + 140° = 180°$

$\therefore x = 40°$

Rpta.: 40°

3. Si $\frac{\pi}{10}$ rad $<>$ $(\overline{ab})^{\circ}$, efectúe $F = \sqrt{a+b}$.

Resolución

$1.^{\circ}$ $\frac{\cancel{\pi}}{10^{o}} \times \frac{180^{o}}{\cancel{\pi}} = 18^{o}$

$\rightarrow$ $18^{\circ} = (\overline{ab})^{\circ}$

$a = 1$

$b = 8$

$\therefore F = \sqrt{1+8} = \sqrt{9} = 3$

Rpta.: 3

4. Si la diferencia de dos ángulos suplementarios es $\frac{\pi}{10}$ rad, determine el mayor de ellos.

Resolución

$1.^{\circ}$ $\frac{\cancel{\pi}}{10^{o}} \times \frac{180^{\circ}}{\cancel{\pi}} = 18^{\circ}$

Suma de ángulos suplementarios

$\alpha + \cancel{\beta} = 180^{\circ}$

$\alpha - \cancel{\beta} = 18^{\circ}$

$2\alpha = 198^{\circ}$

$\alpha = 99^{\circ}$

Rpta.: 99°

5. Convierta a radianes

$$\beta = 25^{\circ}32' + 14^{\circ}28'$$

Resolución

$\beta = 25^{\circ}32' + 14^{\circ}28'$

$\beta = 39^{\circ}\underbrace{60'}_{1^{\circ}}$

$\beta = 40^{\circ} \times \frac{\pi \text{ rad}}{180^{\circ}}$

$\beta = \frac{2\pi}{9}$ rad

Rpta.: $\frac{2\pi}{9}$ rad

Desarrollando en clase

Nivel I

1. Convierta los ángulos a radianes.

I. 120°	
II. 45°	

Resolución

2. Convierta a grados sexagesimales.

I. $\frac{4\pi}{15}$ rad	
II. $\frac{3\pi}{5}$ rad	

Resolución

Nivel II

3. Convierta a radianes

$$\phi = 11^{\circ} + 80^{\circ} + 20^{\circ} - 3^{\circ}$$

Resolución

4. Determine el ángulo α en grados sexagesimales.

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \text{ rad} + \frac{\pi}{2} \text{ rad} - \frac{5\pi}{12} \text{ rad}$$

Resolución

5. Calcule a^b si

$$(\overline{ab})° = \frac{2\pi}{5}\text{ rad}$$

Resolución

7. La señora Gonzales decide premiar la buena calificación de su hijo Raúl, pero antes le deja un pequeño desafío el cual consiste en ordenar de mayor a menor las siguientes fichas:

$\frac{2\pi}{9}$ rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{18}$ rad	$\frac{\pi}{9}$ rad
A	B	C	D

¿Cuál será el orden correcto?

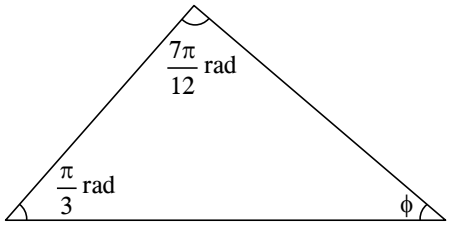
Resolución

Nivel III

6. Convierta a radianes $\alpha = 57°\ 37' + 22°\ 23'$.

Resolución

8. En el triángulo mostrado, halle el valor de ϕ en grados sexagesimales.



Resolución

Sigo practicando

1. Si la diferencia de dos ángulos suplementarios es $\frac{\pi}{5}$ rad, determine el mayor de ellos.

A) 100° B) 108° C) 116°
D) 106° E) 112°

2. Si $\frac{\pi}{48}$ rad $= a°\ (\overline{bc})'$, efectúe $M = (b + c)a^{-1}$.

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$
D) 2 E) 3

3. Halle el valor de β en grados sexagesimales.

$$\beta = \frac{3\pi}{2}\text{ rad} - \frac{\pi}{2}\text{ rad} + \frac{\pi}{4}\text{ rad}$$

A) 115° B) 95° C) 225°
D) 255° E) 295°

5. Convierta θ a radianes.

$$\theta = 25°\,25'\,25'' + 34°\,34'\,35''$$

A) $\frac{2\pi}{3}$ rad B) $\frac{\pi}{6}$ rad C) $\frac{5\pi}{6}$ rad
D) $\frac{\pi}{3}$ rad E) $\frac{\pi}{5}$ rad

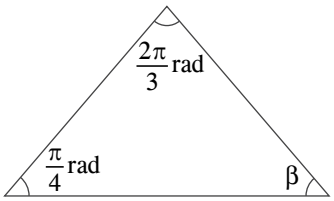
7. Si $(\overline{mn})° = \frac{\pi}{9}$ rad, calcule $(m^2)^n$.

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2
D) $\frac{3}{2}$ E) 3

4. Relacione columnas.

Grados	Radianes
I. 80°	a. $\frac{\pi}{18}$ rad
II. 10°	b. $\frac{3\pi}{2}$ rad
III. 15°	c. $\frac{\pi}{12}$ rad

6. En el triángulo, halle el valor de b en grados sexagesimales.



A) 5° B) 10° C) 15°
D) 20° E) 25°

Exigimos más

Nivel I

1. Convierta los ángulos a radianes.

I. 160°	
II. 75°	

A) $\frac{2\pi}{3}$ rad, $\frac{3\pi}{5}$ rad B) $\frac{8\pi}{9}$ rad, $\frac{5\pi}{12}$ rad
C) $\frac{8\pi}{5}$ rad, $\frac{5\pi}{9}$ rad D) $\frac{\pi}{2}$ rad, $\frac{\pi}{3}$ rad
E) N.A.

2. Convierta a grados sexagesimales.

I. $\frac{7\pi}{15}$ rad	
II. $\frac{\pi}{18}$ rad	

A) 84°; 10° B) 25°; 20° C) 70°; 18°
D) 10°; 50° E) N.A.

3. Convierta a radianes.

$$\alpha = 23° + 40° + 27° - 10°$$

A) $\frac{2\pi}{3}$ rad B) $\frac{4\pi}{9}$ rad C) $\frac{7\pi}{5}$ rad
D) $\frac{4\pi}{3}$ rad E) $\frac{\pi}{3}$ rad

4. Halle el valor de ϕ en grados sexagesimales.

$$\phi = \frac{7\pi}{9}\text{ rad} + \frac{\pi}{4}\text{ rad} - \frac{\pi}{5}\text{ rad}$$

A) 100° B) 149° C) 139°
D) 129° E) 109°

Nivel II

5. Convierta a radianes $\theta = 2°\,14'\,35'' + 3°\,45'\,25''$.

A) $\frac{\pi}{5}$ rad B) $\frac{\pi}{6}$ rad C) $\frac{\pi}{10}$ rad
D) $\frac{\pi}{15}$ rad E) $\frac{\pi}{30}$ rad

6. Si $(\overline{ab})° = \frac{\pi}{15}$ rad, calcule $(a+b)^{a+b}$.

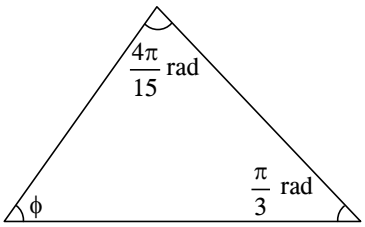
A) 3 B) 9 C) 15
D) 21 E) 27

7. Relacione columnas con su equivalente respectivo.

Grados	Radianes
I. 80°	a. $\frac{2\pi}{15}$ rad
II. 24°	b. $\frac{3\pi}{10}$ rad
III. 54°	c. $\frac{4\pi}{9}$ rad

A) Ia, IIb, IIIc B) Ic, IIa, IIIb
C) Ia, IIc, IIIb D) Ib, IIc, IIIa
E) Ib, IIa, IIIc

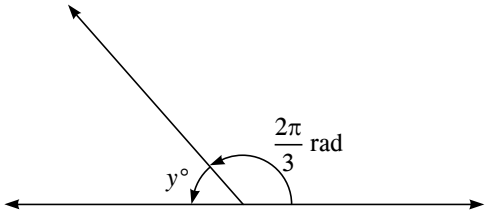
8. En el triángulo mostrado, halle el valor de ϕ en grados sexagesimales.



A) 72° B) 64° C) 30°
D) 52° E) 120°

Nivel III

9. A partir del gráfico



halle el valor de $F = \sqrt{y+4}$.

A) 2 B) 4 C) 8
D) 16 E) 64

10. Efectúe

$$E = \frac{25° + \frac{\pi}{3}\text{rad} + 15°}{64° + \frac{\pi}{6}\text{rad} - 44°}$$

A) 2 B) 1 C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{8}$

SISTEMAS DE MEDICIÓN ANGULAR III

CAPÍTULO 3

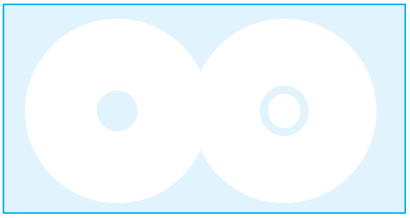
MATEMÁTICA

Aprendizajes esperados

- Utiliza el factor de conversión correctamente para la conversión de una unidad angular a otra.
- Reconoce las distintas equivalencias entre las unidades angulares.

Helicocuriosidades

¿Qué es π?



¿Cuál es la diferencia entre círculo y circunferencia?

El círculo es una figura con área, mientras que la circunferencia es solo la orilla del círculo.

Haz este experimento: dibuja un círculo y traza alguno de sus diámetros; corta un cordón del tamaño del diámetro y verifica cuántas veces cabe el cordón sobre la circunferencia. Notarás que cabe tres veces y un cachito. Interesante…

Traza otro círculo y divide lo que mide su circunferencia entre lo que mide su diámetro. (Puedes medir la circunferencia colocando un cordón sobre ella y luego midiendo el cordón) ¿Tu resultado es parecido a 3,1416? Hazlo cuántas veces quieras: el resultado siempre se parece a 3,1416. Es decir, en ambos experimentos tenemos que el diámetro cabe tres veces en la circunferencia y sobra un cachito.

Estos resultados son solo aproximaciones. El resultado exacto, π, no es exactamente igual a 3,1416. Los matemáticos llaman π al resultado de dividir lo que mide la circunferencia de un círculo entre lo que mide su diámetro. Este valor tiene un papel fundamental en las matemáticas.

Antes del siglo XVIII no se tenía un símbolo para esta división, lo que los matemáticos solían escribir eran frases como estas: *quantitas, in quam cum multiplicetur diameter, proveniet circumferentia* (la cantidad que, cuando es multiplicada por el diámetro, resulta en la circunferencia).

La letra griega π se utiliza desde 1706 para representar al resultado de dividir la circunferencia entre el diámetro de un círculo. π es equivalente a la letra *p* de nuestro alfabeto y el matemático William Jones la escogió porque era la letra que empieza la palabra *peripheria*.

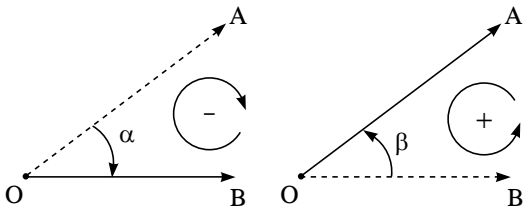
Helicoteoría

APLICACIONES DE LOS SISTEMAS ANGULARES

Recordemos los puntos teóricos estudiados en los dos capítulos anteriores.

Primero

Los ángulos trigonométricos, podrán tener medida positiva o negativa, esto dependerá de como se hallan generado



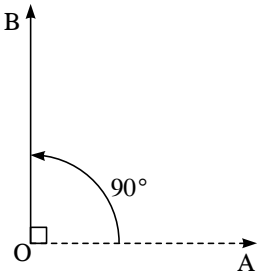
Sentido de giro horario

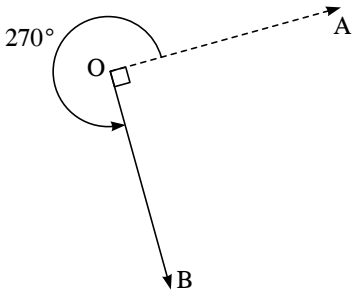
Sentido de giro antihorario

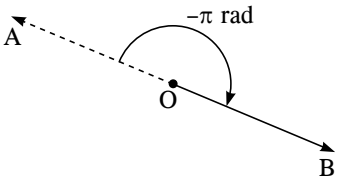
Segundo

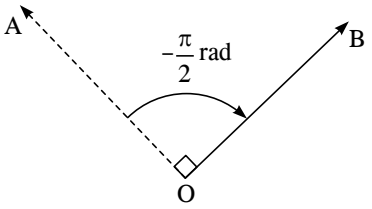
Estos ángulos pueden medirse en grados sexagesimales o radianes.

Ejemplos



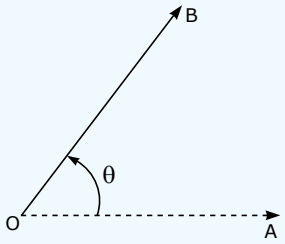




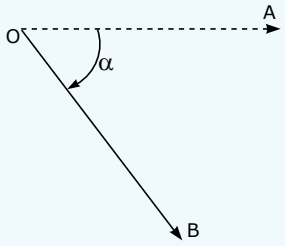


Nota

Si $\theta = 60°$

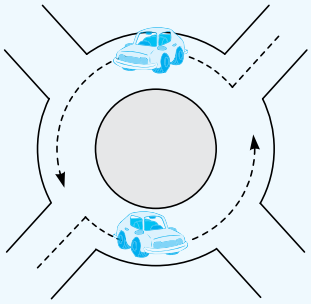


Si $\alpha = -60°$



Sabía que...

Los autos se desplazan en sentido antihorario alrededor de un óvalo.



Tercero

La relación de equivalencia entre ambos sistemas (sexagesimal y radial) está dado por

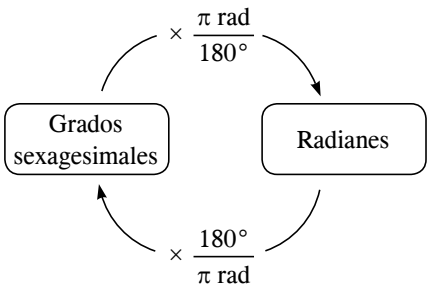
$$\boxed{\pi \text{ rad} <> 180°}$$

Así entonces

- Si $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad $\rightarrow \theta = \frac{180°}{4} = 45°$
- Si $\alpha = \frac{\pi}{6}$ rad $\rightarrow \alpha = \frac{180°}{6} = 30°$
- Si $\beta = \frac{2\pi}{9}$ rad $\rightarrow \beta = \frac{2 \times 180°}{9} = 40°$

Cuarto

Para convertir un ángulo del sistema sexagesimal (en grados) al sistema radial (en radianes), se utiliza el factor de conversión así



Ejemplos

- Si $\theta = 20° \rightarrow \theta = 20° \times \frac{\pi \text{ rad}}{180°} = \frac{\pi}{9}$ rad
- Si $\alpha = \frac{\pi \text{ rad}}{10°} \rightarrow \alpha = \frac{\pi \text{ rad}}{10} \times \frac{180°}{\pi \text{ rad}} = 18°$

Quinto

El sistema sexagesimal posee subunidades que son

1': minuto sexagesimal	$1° <> 60'$
1": segundo sexagesimal	$1' <> 60''$

Así

- $\theta = 2° \rightarrow \theta = 2 \times 60' = 120'$
- $\alpha = 4°\ 20' \rightarrow \alpha = 4° + 20'$
  $\alpha = 4 \times 60' + 20'$
  $\alpha = 240' + 20'$
  $\alpha = 260'$

Observación

Un modo práctico de convertir ángulos que están en radianes a grados sexagesimales es sustituyendo π rad por 180°.

Recuerda

Para poder sumar o restar ángulos estos deben de estar en la misma unidad angular.

Sabía que...

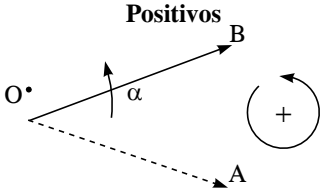
El nombre pi (π), letra *p* del alfabeto griego, se debe a la primera letra de la palabra perímetro o periferia.

Helicosíntesis

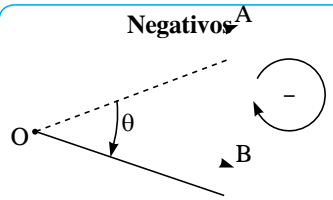
ÁNGULO TRIGONOMÉTRICO

estos pueden ser

Positivos



Negativos



se miden en

Grados sexagesimales (1°)

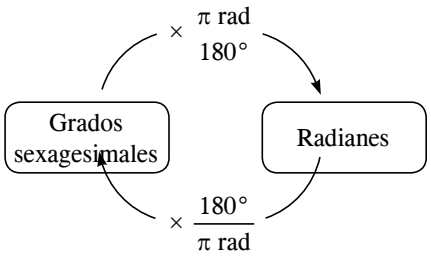
Radianes (1 rad)

donde

$180° <> \pi$ rad

se utiliza

Factor de conversión



Problemas resueltos

1. Halle el valor de β en grados sexagesimales

$$\beta = \frac{2\pi}{5}\text{rad} - 10° + \frac{\pi}{15}\text{rad}$$

Resolución

1° $\frac{2\pi}{5}\text{ rad} \times \frac{180°}{\pi\text{ rad}} = 72°$

2° $\frac{\pi}{15}\text{ rad} \times \frac{180°}{\pi\text{ rad}} = 12°$

$\rightarrow \beta = 72° - 10° + 12°$

$\beta = 62° + 12°$

$\beta = 74°$

Rpta.: 74°

2. Efectúe

$$P = \frac{\frac{2\pi}{3}\text{ rad} - 20°}{\frac{\pi}{18}\text{ rad}}$$

Resolución

1° $\frac{2\pi}{3}\text{ rad} \times \frac{180°}{\pi\text{ rad}} = 120°$

2° $\frac{\pi}{18}\text{ rad} \times \frac{180°}{\text{[redacted]}} = 10°$

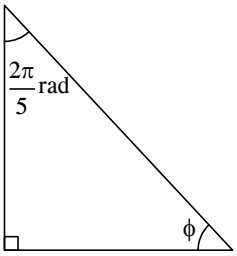
$\rightarrow P = \frac{120° - 20°}{10°}$

$P = \frac{100°}{10°}$

$P = 10$

Rpta.: 10

3. Halle el valor de ϕ en grados sexagesimales.



Resolución

1° $\frac{2\pi}{5}\text{ rad} \times \frac{180°}{\pi\text{ rad}} = 72°$

$\rightarrow 72° + \phi = 90°$

$\phi = 18°$

Rpta.: 18°

4. Si $a + b = 72$, además $x°y' = a°b' + b°a'$, efectúe

$$M = \frac{x+y}{17}$$

Resolución

1° $x°y' = a°b' + b°a'$

$x°y' = (a+b)°(a+b)'$

$x°y' = 72°\ 72'$

$x°y' = 73°\ 12'$

$\rightarrow x = 73 \wedge y = 12$

2° $M = \frac{73+12}{17}$

$M = \frac{85}{17}$

$M = 5$

Rpta.: 5

5. Efectúe $Q = \sqrt{m+n+p}$ si $\frac{3\pi}{5}\text{ rad} = (\overline{mnp})°$.

Resolución

1° $\frac{3\pi}{5}\text{ rad} \times \frac{180°}{\pi\text{ rad}} = 108°$

$\rightarrow 108° = (\overline{mnp})°$

$m = 1$

$n = 0$

$p = 8$

1° $Q = \sqrt{1+0+8}$

$Q = \sqrt{9}$

$Q = 3$

Rpta.: 3

Desarrollando en clase

Nivel I

1. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

a. $1° <> 60''$ ( )

b. $20° <> \frac{2\pi}{9}$ rad ( )

c. $\frac{140°}{70°} = 2°$ ( )

d. $\frac{\pi}{2}$ rad $+ \frac{\pi}{4}$ rad $= 135°$ ( )

2. Halle el valor de P en grados sexagesimales.

$$P = \frac{5\pi}{18}\text{rad} + 40° - \frac{\pi}{9}\text{rad}$$

Resolución

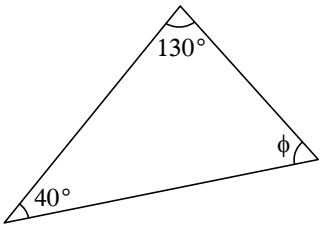
Nivel II

3. Efectúe

$$M = 7 + \frac{144°}{\frac{2\pi}{5}\text{rad}}$$

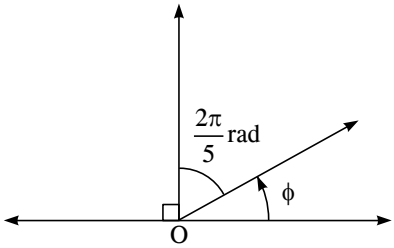
Resolución

4. Halle el valor de ϕ en radianes.



Resolución

5. Halle el valor de ϕ en grados sexagesimales.



Resolución

Nivel III

6. Si $a + b = 80$, además $m°\,n' = a°\,b' + b°\,a'$, efectúe

$$E = \sqrt{m} + \frac{n}{5}$$

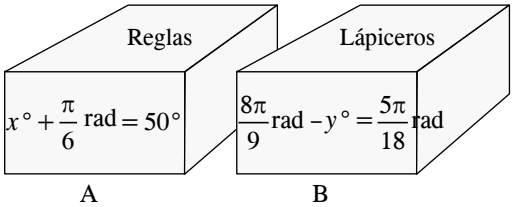
Resolución

7. Efectúe $K=\sqrt{a+b+c}$ si

$$\frac{3\pi}{4}\text{rad} = (\overline{abc})°$$

Resolución

8. En un inventario del laboratorio de matemática, Fabián se encuentra con dos cajas



siendo x el número de reglas y y el número de lapiceros.

a. ¿Cuántos lapiceros contiene la caja B?

b. ¿Cuántas reglas contiene la caja A?

Resolución

Sigo practicando

1. Simplifique

$$\frac{a°b'+b°a'}{(a+b)'}$$

A) 31 B) 30 C) 60
D) 61 E) 62

2. Si $\frac{\pi}{24}\text{rad} = a°b'$, calcule $b-a$.

A) 18 B) 20 C) 19
D) 21 E) 23

3. Halle el valor de Y en grados sexagesimales si

$$Y=\frac{3\pi}{5}\text{rad}+12°$$

A) 30° B) 60° C) 120°
D) 150° E) 180°

A) 8 B) 7 C) 5
D) 9 E) 6

4. Si $\frac{\pi}{12}\text{rad}=(\overline{mn})°$, efectúe $P=n^{m-1}$.

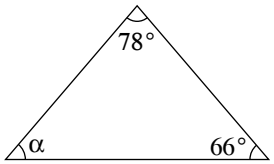
A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

5. Reduzca

$$N = 2 + \frac{\frac{4\pi}{5}\text{rad}}{36°}$$

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 10

6. Halle el valor de α en radianes.



A) $\frac{\pi}{2}$ rad B) $\frac{\pi}{5}$ rad C) $\frac{\pi}{3}$ rad
D) $\frac{\pi}{4}$ rad E) $\frac{\pi}{9}$ rad

7. Si $a+b=75$, además $m°n'=a°b'+b°a'$, efectúe $E=\sqrt{m+n-10}$.

Exigimos más

Nivel I

1. Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

- $15° <> \frac{\pi}{12}$ rad ( )
- $\frac{3\pi}{4}$ rad $- \frac{\pi}{20}$ rad $= 114°$ ( )
- $\frac{102°}{51} = 2°$ ( )

A) VFV B) VFF C) VVV
D) FFF E) FFV

2. Reduzca

$$A = \frac{\frac{2\pi}{5}\text{ rad}}{3} + 1^{o}$$

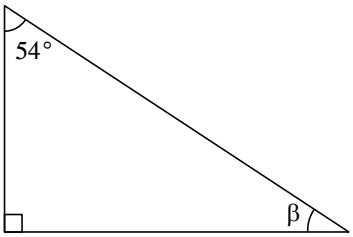
A) 25° B) 35° C) 45°
D) 55° E) 65°

3. Halle el valor de M en grados sexagesimales.

$$M = \frac{5\pi}{9}\text{ rad} + 30° - \frac{\pi}{15}\text{ rad}$$

A) 128° B) 118° C) 117°
D) 137° E) 138°

4. Halle el valor de β en radianes.

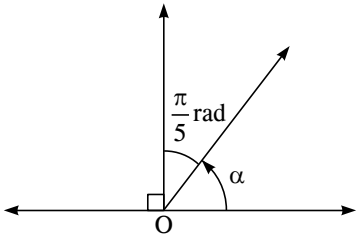


A) $\frac{\pi}{4}$ rad B) $\frac{\pi}{5}$ rad C) $\frac{\pi}{3}$ rad
D) $\frac{\pi}{9}$ rad E) $\frac{\pi}{2}$ rad

Nivel II

5. Halla el valor de α en grados sexagesimales.

A) 44°
B) 36°
C) 52°
D) 72°
E) 54°



6. Si $a + b = 65$, calcule $a°b' + b°a'$.

A) 65° 4' B) 66° 5' C) 65° 5'
D) 66° 4' E) 66° 3'

7. Efectúe $E = \sqrt{4a + b}$ si $\frac{\pi}{12}$rad $= (\overline{ab})°$.

A) 3 B) 5 C) 4
D) 2 E) 1

8. Calcule $\frac{x}{y}$ en

$$x - \frac{\pi}{10}\text{ rad} = \frac{\pi}{9}\text{ rad}$$

$$y + \frac{\pi}{3}\text{ rad} = \frac{5\pi}{9}\text{ rad}$$

A) $\frac{4}{19}$ B) $\frac{19}{20}$ C) $\frac{20}{19}$
D) $\frac{1}{20}$ E) $\frac{1}{19}$

Nivel III

9. Sabiendo que

$$\frac{\pi}{18}\text{ rad} = (3n+1)°$$

$$\frac{\pi}{n+2}\text{ rad} = (5m+6)°$$

efectúa $K = \sqrt{m+n}$.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

10. Convierta en radianes

$$\alpha = 125°25' + 114°35'$$

A) $\frac{5\pi}{3}$ rad B) $\frac{2\pi}{3}$ rad C) $\frac{\pi}{3}$ rad
D) $\frac{4\pi}{5}$ rad E) $\frac{4\pi}{3}$ rad